

Anregung von Substrukturen in quaderförmigen Resonatoren durch elektrisch kleine Öffnungen

Dipl.-Phys. J. Petzold, Dr. rer. nat. S. Tkachenko, Prof. Dr.-Ing. R. Vick,
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg,
Lehrstuhl für EMV

1 Einleitung

Die Einflüsse von Öffnungen in leitfähigen Wänden von Hohlraumresonatoren auf die innere Feldverteilung sind entscheidend für die Kenntnis der Schirmdämpfung eines Gehäuses. Aktuelle Arbeiten beschreiben die durch die Apertur hervorgerufene Kopplung eines äußeren elektromagnetischen Feldes mit dem inneren Feld [1]. So angeregte Hohlraummoden können gerade im hochenergetischen Resonanzfall, weitere Aperturen anregen und so einen Beitrag zum äußeren gestreuten Spektrum liefern [2]. Diese Arbeit widmet sich anhand eines quaderförmigen Hohlraumresonators der mehrere Aperturen aufweist (Abb.1), der Fragestellung, in wie weit eine Aussage über die Wechselwirkung zwischen den Hohlraummoden und des gestreuten Feldes des Resonators anhand von analytischen Modellen getroffen werden kann. Zu diesem Zweck wird in einem ersten Schritt ein analytischer Ausdruck für die Feldverteilung im Inneren des Resonators aus [1] verwendet. Für eine effiziente Berechnung der sich ergebenden 3x-Summe (Spiegelung in x-, y- und z-Richtung) wird in eine 2x-Summe reduziert. Damit ist mit vertretbarem Rechenaufwand die Berücksichtigung einer, für die Konvergenz der Summe, genügend großer Zahl an Summanden sichergestellt. Das so an jedem Ort des Resonators bekannte Feld wird im Anschluss zur Anregung einer zweiten Apertur, die die inneren Hohlraummoden in den Freiraum abstrahlt, verwendet. Außerdem wird dem Ausdruck aus [1] eine Güte zugeordnet, wodurch die Verluste durch die endliche Leitfähigkeit der Wände und die Aperturen berücksichtigt werden können, um eine qualitative Aussage über die von der Apertur abgestrahlten Leistungen treffen zu können. Dies ist nötig da auch äußere Resonanzen auftreten, die die inneren Resonanzen überlagern und eine Analyse erschweren.

2 Anregung des Resonators

Das innere Feld des Resonators lässt sich elegant mit Hilfe der Spiegelladungsmethode bestimmen. Anstatt die vielfache Reflexion der von den Dipolen abgestrahlten Wellen zu betrachten, kann das Feld als Superposition der Felder vielfach gespiegelter Dipole verstanden werden. In [1] wird diese Methode angewandt um, ausgehend von der Green'schen Funktion für den Freiraum, erst die Green'sche Funktion des Resonators und schließlich das Feld im Inneren zu bestimmen. An dieser Stelle werden nur die Ergebnisse aus [1] verwendet. Für vertiefende Studien empfiehlt sich die Lektüre der Quelle.

Für die in Abb.1 dargestellte Geometrie lassen sich die Komponenten des inneren elektrischen Feldes ohne Beschränkung der Allgemeinheit als

$$E_x = -\frac{2jk\eta_0}{V}m_{1,y}\frac{\partial S}{\partial z} \quad E_y = 0 \quad E_z = \frac{2jk\eta_0}{V}m_{1,y}\frac{\partial S}{\partial x} \quad (1)$$

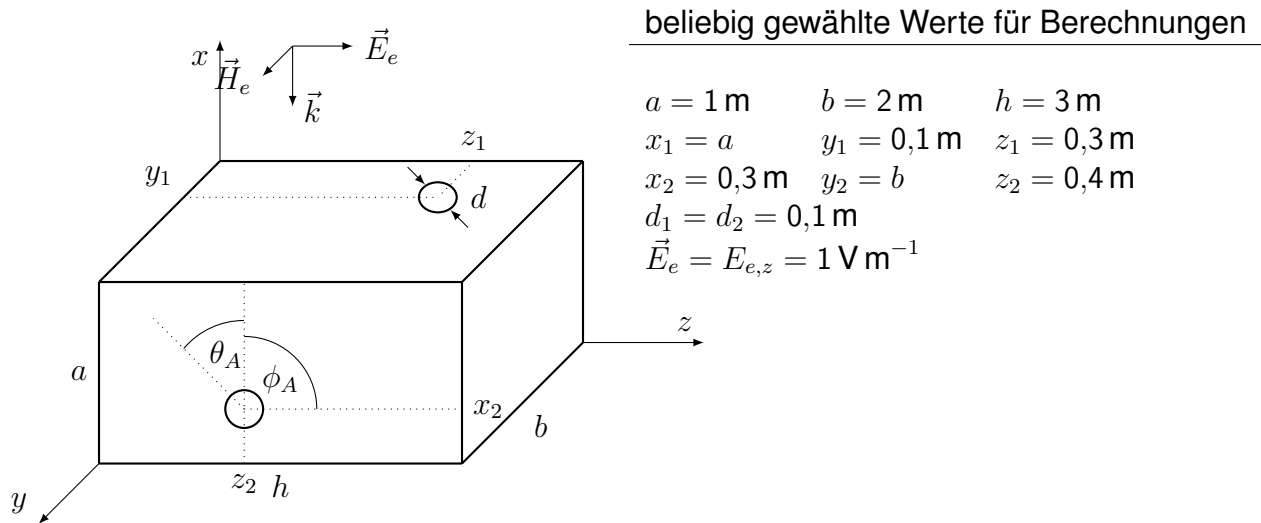


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Hohlkörpers mit Aperturen und der einfallenden ebenen Welle

und mit $-j\omega\mu\vec{H}(\vec{r}, j\omega) = \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, j\omega)$ die Komponenten des inneren magnetischen Feldes als

$$H_x = -\frac{2k\eta_0}{V\omega\mu}m_{1,y}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} \quad H_y = -\frac{2k\eta_0}{V\omega\mu}m_{1,y}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) \quad H_z = \frac{2k\eta_0}{V\omega\mu}m_{1,y}\frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z} \quad (2)$$

schreiben. S ist eine Summe über die Modenzahlen $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$, die der Anzahl der Spiegelung der Dipolmomente in den drei Raumrichtungen entsprechen.

$$S = \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \epsilon_{n_x} \epsilon_{n_z} \cos(k_x x) \cos(k_x x_1) \sin(k_y y) \sin(k_y y_1) \cdot \frac{\cos(k_z z) \cos(k_z z_1)}{k_n^2 - k_0^2 + j\delta \text{sign}(k_0)} \quad (3)$$

mit

$$k_n = (k_x, k_y, k_z), \quad k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{b}, \quad \text{und} \quad k_z = \frac{n_z \pi}{h}$$

Zur Berechnung des inneren Feldes muss die Summe ausgewertet werden. Um den Speicherbedarf und die Rechenzeit zu minimieren, kann S auf eine zweifach-Summe reduziert werden. Die Struktur der Summe erlaubt die Ausnutzung einer analytischen Konvergenzaussage nach [3], was nach einigen Umformungen auf (4) führt.

$$S = \frac{a}{2} \cdot \sum_{n_y, n_z=0}^{\infty} \epsilon_{n_z} \sin(k_y y) \sin(k_y y_1) \cdot \cos(k_z z) \cos(k_z z_1) \cdot \frac{e^{(-x+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x-x_1)\alpha'} + e^{(-x-x_1)\alpha'}}{\alpha'(1 - e^{-2a\alpha'})} \quad (4)$$

Die Überführung in eine 2fach-Summe bedeutet eine Verringerung der Anzahl der Rechenoperationen. Statt N^3 sind nur noch N^2 Operationen nötig. N ist dabei die Anzahl an berücksichtigten Reflexionen. Abb. 2e zeigt das für einen Punkt ermittelte Spektrum des inneren elektrischen Feldes, während Abb. 2a-2d die orts aufgelöste innere elektrische Feldstärke in der Ebene der Apertur zeigt. Klar zu erkennen sind die verschiedenen Hohlraummoden und der Ort der Apertur bei $x = 0$ und $z = 0,2 \text{ m}$. Die Rechenzeit betrug für Abb. 2e ca. 2 s und für eine Unterabbildung aus 2a-2d circa 1 min.

3 Güte eines Resonators mit Aperturen

Zur Vermeidung von Singularitäten in (3) bei den Eigenfrequenzen des Resonators, werden in [1] Verluste in Form eines imaginären Parameters γ eingeführt, der die reellen Polstellen in die komplexe Ebene verschiebt. Es ist auch möglich, statt dessen die Wellenzahl $k_0 = \omega c^{-1} (1 + (2jQ)^{-1})$ in den komplexen Bereich zu erweitern [4]. Dabei wird der Faktor Q eingeführt, der mit der Güte des Resonators identifiziert werden kann. Die Güte hängt bekannterweise von den auftretenden Verlusten ab. Im gewählten Modell sind die Verluste durch die endliche Leitfähigkeit der Wände des Resonators (Q_W^{-1}) und durch die austretenden Felder der Aperturen (Q_A^{-1}) bedingt. Beiden Effekten kann ein jeweiliger Gütefaktor zugeordnet werden [5].

$$Q_W = \frac{3V}{2\mu_r A \delta} \quad Q_A = \frac{72\pi V}{k^3 d^6} \quad (5)$$

Dabei ist δ die Skin-Tiefe. So lässt sich die gesamte Güte des Resonators berechnen.

$$Q^{-1} = Q_W^{-1} + Q_A^{-1} \quad (6)$$

$$Q = \frac{72\pi V}{48\pi\mu_r A \delta + k^3 d^6}$$

4 Anregung einer zweiten Apertur

Ziel der Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses innerer Hohlraummoden auf das äußere, gestreute Feld. Unter Berücksichtigung späterer experimenteller Messungen wird der Resonator dazu wie in Abb.1 dargestellt mit einer 2. Apertur versehen. Diese wird aufgrund der gewählten Orientierung nicht vom äußeren Feld, jedoch aber vom inneren Feld angeregt. Die Apertur befindet sich in der x - z -Ebene und weist den gleichen Durchmesser wie die erste Apertur auf. Aufgrund der getroffenen Näherung der niedrigen Frequenzen kann die Feldkopplung der Apertur durch die Polarisierbarkeit elektrischer und magnetischer Dipole beschrieben werden. Es werden nun die Momente der Dipole bestimmt, angeregt durch die inneren Felder, die durch (1) und (2) beschrieben werden.

$$p_{2,y} = 2\alpha_e \epsilon_0 E_{Res,y} = 0 \quad m_{2,x} = -2\alpha_m H_{Res,x} \quad m_{2,z} = -2\alpha_m H_{Res,z} \quad (7)$$

Unter der gewählten Konfiguration treten nur magnetische Dipolmomente auf, die durch die x - und z -Komponenten des H -Feldes des Resonators angeregt werden. Mit (2) und (4) ergeben sich so die magnetischen Dipolmomente am Ort der 2. Apertur \vec{r}_2 zu

$$m_{2,x} = -\frac{2d^6 a}{9V c \mu} E_0(j\omega) \sum_{n_y, n_z=0}^{\infty} \epsilon_{n_z} k_y \cos(k_y y_2) \sin(k_y y_1) \cdot \cos(k_z z_2) \cos(k_z z_1) \cdot \frac{e^{(-x_2+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x_2+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x_2-x_1)\alpha'} + e^{(-x_2-x_1)\alpha'}}{(1 - e^{-2a\alpha'})} \quad (8a)$$

$$m_{2,z} = \frac{2d^6 a}{9V c \mu} E_0(j\omega) \sum_{n_y, n_z=0}^{\infty} \epsilon_{n_z} k_y \cos(k_y y_2) \sin(k_y y_1) \cdot k_z \sin(k_z z_2) \cos(k_z z_1) \cdot \frac{e^{(-x_2+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x_2+x_1-2a)\alpha'} + e^{(x_2-x_1)\alpha'} + e^{(-x_2-x_1)\alpha'}}{\alpha'(1 - e^{-2a\alpha'})} \quad (8b)$$

Die Dipolmomente strahlen in den halbseitigen Freiraum ab, was durch den Faktor 2 in (7) bereits berücksichtigt ist. Zur Berechnung der austretenden Feldstärken und der austretenden Leistung können nun die bekannten Gleichungen für den Hertz'schen Dipol herangezogen werden [6].

$$\vec{E}(\vec{r}, j\omega) = j\omega\mu \left[\vec{m}_2(\vec{r}_2) \times \nabla' \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] \quad \vec{H}(\vec{r}, j\omega) = -\nabla \times \left[\vec{m}_2(\vec{r}_2) \times \nabla' \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \right] \quad (9)$$

wobei $R = |\vec{r} - \vec{r}_2|$ ist. Im Fernfeld sind die nicht verschwindenden Feldkomponenten dann

$$E_{A,\phi_A} = \frac{(m_{2,x} + m_{2,z})}{4\pi R} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} k^2 \cos(\theta_A) \quad H_{A,\theta_A} = -\frac{(m_{2,x} + m_{2,z})}{4\pi R} k^2 \cos(\theta_A) \quad (10)$$

Der zeitlich gemittelte Realteil der Leistungsdichte \vec{P} entspricht der Messgröße im Experiment. Aufgrund der sphärischen Symmetrie ist es sinnvoll \vec{E} und \vec{H} in Kugelkoordinaten anzugeben. Unter Fernfeldbedingungen ergibt sich der Ausdruck

$$P_A = \frac{1}{2} \Re \{ E_\phi H_\theta^* \} = |m_{2,x} + m_{2,z}|^2 \frac{k^2 Z_0}{32\pi^2 R^2} \sin^2 \theta \quad (11)$$

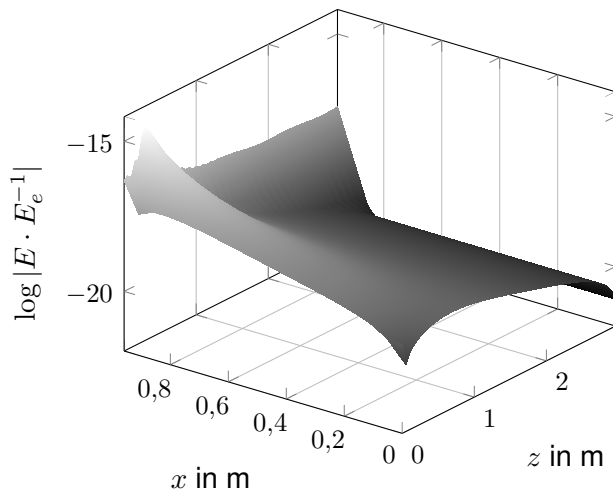
Damit kann die frequenz- und ortsabhängige Leistungsdichte der austretenden Felder berechnet werden. Dem austretenden Feld ist das gestreute Feld des Resonators überlagert. Um die bei einer Messung zu erwartende Leistungsdichte theoretisch zu bestimmen, wird in folgenden Abschnitt auf den Streuprozess eines elektrisch großen Streuers eingegangen. Abb2f zeigt die berechnete Leistungsdichte des Aperturfeldes in einer Entfernung von $R = 10$ m und unter einem Winkel $\theta = 45^\circ$.

5 Streuung eines elektrisch großen Resonators

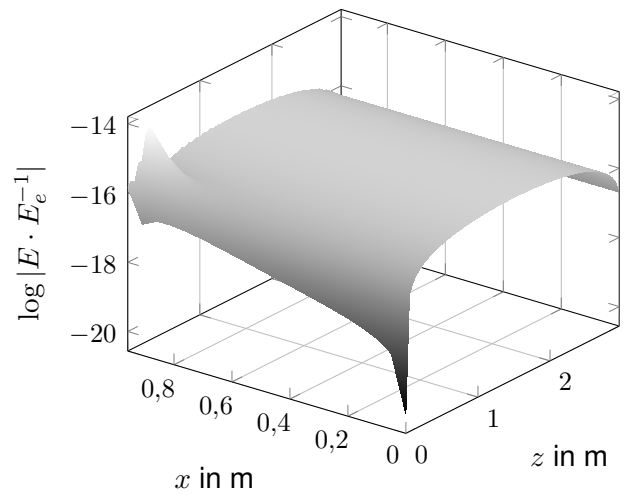
Ungünstiger Weise existiert bisher keine analytisch exakte Lösung für die Streuung an einem quaderförmigen Resonator, dessen Abmaße im Bereich der Wellenlänge des gestreuten Feldes liegt. Während verschiedene Näherungen denkbar sind, soll an dieser Stelle die Mie-Theorie herangezogen werden. Sie liefert analytisch exakte Lösungen für sphärische Körper im Bereich der Wellenlänge. Betrachtet man also statt einem quaderförmigen Resonator einen sphärischen Resonator mit gleichem Volumen, kann das gestreute Fernfeld berechnet werden [7].

$$\begin{pmatrix} E_{||,R} \\ E_{\perp,R} \end{pmatrix} = \frac{e^{jkR}}{-jkR} \begin{pmatrix} S_2(\theta) & 0 \\ 0 & S_1(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{||,e} \\ E_{\perp,e} \end{pmatrix} \quad (12)$$

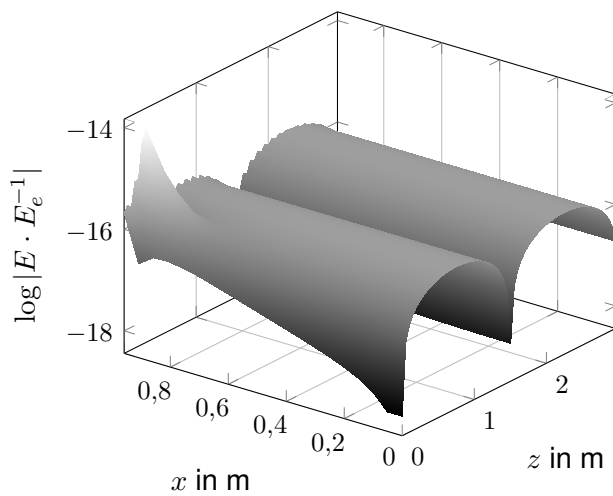
Dabei sind die Felder in senkrechte und parallele Komponenten zur Streuebene, die durch die Richtung des einfallenden Feldes und der betrachteten Streurichtung aufgespannt wird, zerlegt. Der Streuwinkel θ ist der Winkel zwischen der Einfallsrichtung und der betrachteten Richtung des gestreuten Feldes. Die Matrix auf der rechten Seite von (12) wird *Amplituden-Streumatrix* genannt. Ihre Komponenten ergeben sich aus der Lösung der Wellengleichung unter der Stetigkeitsbedingung der Feldkomponenten an der Grenze



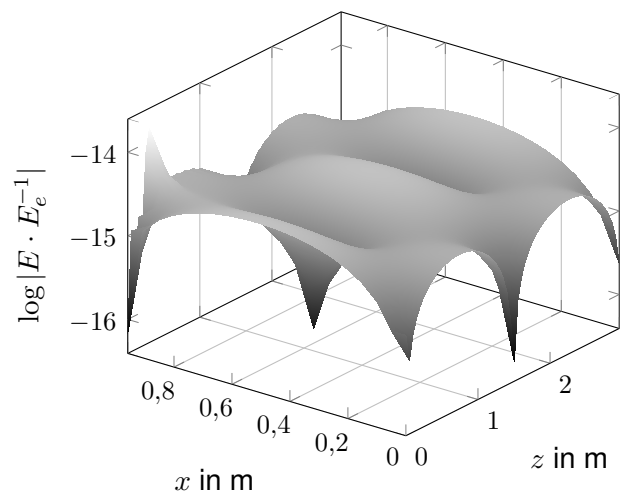
(a) 30 MHz



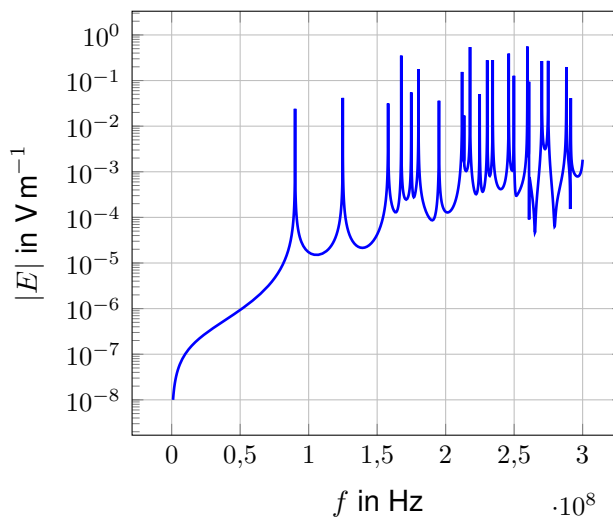
(b) 90 MHz



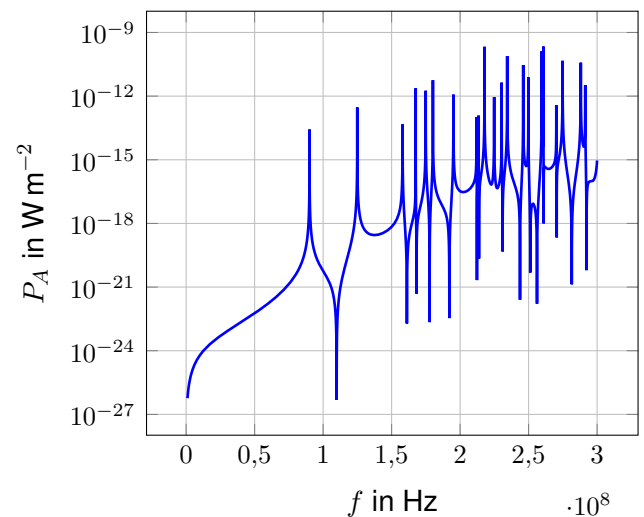
(c) 125 MHz



(d) 288 MHz



(e)



(f)

Abbildung 2: (a)-(d): ortsabhängige innere Feldstärke bei mehreren Frequenzen; (e): Frequenzabhängigkeit des inneren Feldes; (f): Frequenzabhängigkeit der abgestrahlten Leistungsdichte der 2. Apertur bei $R = 10$ m

zwischen den Medien. Nach einer Reihe von nicht trivialen Zwischenschritten (siehe [7]) können für die Komponenten der Matrix folgende Ausdrücke gewonnen werden.

$$S_1(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ a_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\phi))}{\sin(\phi)} + b_n \frac{d}{d\phi} P_n^{(1)}(\cos(\phi)) \right\} \quad (13a)$$

$$S_2(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ a_n \frac{d}{d\phi} P_n^{(1)}(\cos(\phi)) + b_n \frac{P_n^{(1)}(\cos(\phi))}{\sin(\phi)} \right\} \quad (13b)$$

Man kann die gestreute Welle nach (13) als eine Superposition vieler Partialwellen mit den Amplituden a_n und b_n verstehen. Sie sind über Ricatti-Bessel-Funktionen von der elektrischen Länge des Streuers abhängig. Aus (12) ist sofort ablesbar, dass für die Konfiguration aus Abb.1 gilt

$$E_R = E_{\perp,R} = \frac{e^{jkR}}{-jkR} S_1(\phi) E_e \quad (14)$$

Mit (14) erhält man einen Ausdruck für die Leistungsdichte im Fernfeld, der nur noch vom Abstand zum Resonator und dem Streuwinkel abhängt.

$$P_R = \frac{|S_1(\phi) E_e|^2}{2c\mu k^2 R^2} \quad (15)$$

6 Interne Resonanzen und äußeres Streufeld

Um die Auswirkungen interner Resonanzen auf das äußere Streufeld zu untersuchen, werden nun im Folgenden einzelne Hohlraumresonanzmoden betrachtet. Resonanz tritt auf, wenn gilt

$$\Re \{k_0^2\} = k_n^2 \quad (16)$$

Die Gleichung (11) ermöglicht dann zusammen mit der Gleichung (8a) für die Dipolmomente der zweiten Apertur und der Gleichung (6) die quantitativ möglichst exakte Bestimmung der mittleren Leistungsdichte $P_A(k_n, \theta, R)$ des von der Apertur abgestrahlten Feldes. Um eine handhabbare, rein frequenzabhängige Größe zum einfachen Vergleich beider Streuprozesse werden zwei Wirkungsquerschnitte definiert.

$$\sigma_{t,R}(\omega) = \left| \vec{E}_0(\omega) \right|^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \vec{E}_R(\omega, R, \theta, \phi) \right|^2 R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (17a)$$

$$\sigma_{t,A}(\omega) = \left| \vec{E}_0(\omega) \right|^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \vec{E}_A(\omega, R, \theta_A, \phi_A) \right|^2 R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (17b)$$

Der Resonator ist aufgrund seines hohen Brechungsindex ein starker Streuer und weißt einen um mindestens eine Größenordnung höheren totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{t,R}$ auf, als die Apertur ($\sigma_{t,A}$). Um einen noch sichtbaren Einfluss der inneren Moden auf das gestreute Feld zu erhalten, kann die unterschiedliche Winkelabhängigkeit der beiden Streuprozesse ausgenutzt werden. Nützlich ist hier die Betrachtung der differentiellen Wirkungsquerschnitte $\sigma_{d,R}$ und $\sigma_{d,A}$, da sie zwar von θ und ϕ aber nicht von Abstand R zum Streuzentrum abhängen.

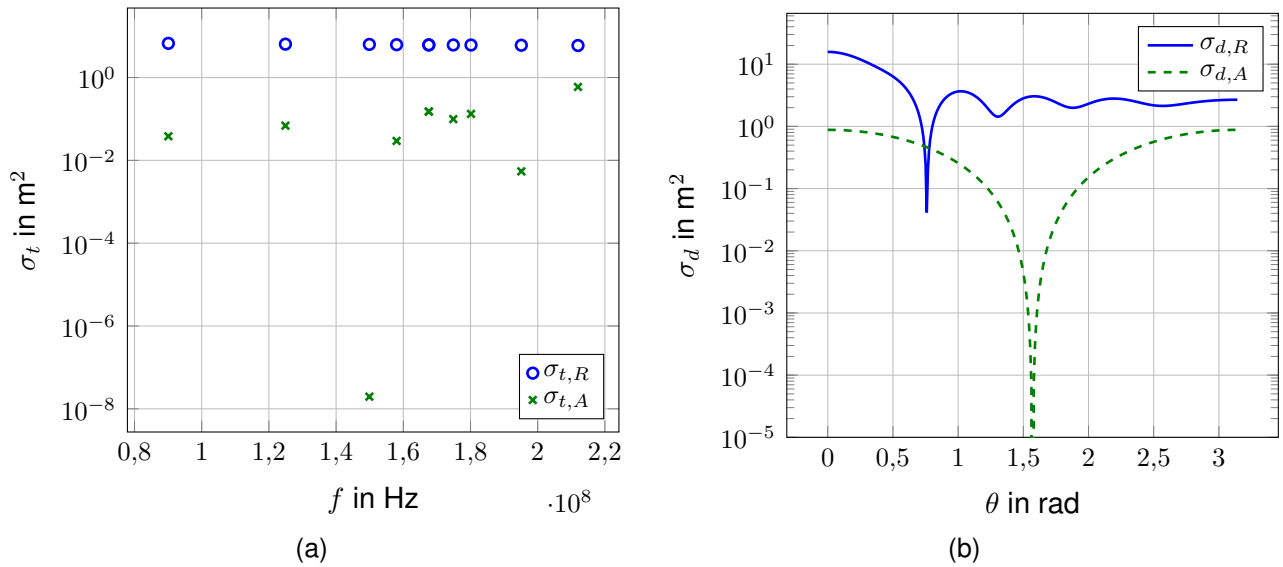


Abbildung 3: Die Berechnung des Streukoeffizienten S_1 nach (13) wurde auf Basis von [8] durchgeführt. (a): Vergleich des totalen Streuwirkungsquerschnittes der 2. Apertur und dem Resonator, angenähert durch eine perfekt leitende Kugel; (b) Winkelabhängigkeit des differentiellen Streuwirkungsquerschnitts der 2. Apertur und dem Resonator bei der Frequenz $f_{221} = 212 \text{ MHz}$

$$\sigma_{d,R}(\omega, \theta, \phi) = \frac{4\pi R^2 \left| \vec{E}_R(\omega, R, \theta, \phi) \right|^2}{\left| \vec{E}_0(\omega) \right|^2} \quad \sigma_{d,A}(\omega, \theta, \phi) = \frac{2\pi R^2 \left| \vec{E}_A(\omega, R, \theta, \phi) \right|^2}{\left| \vec{E}_0(\omega) \right|^2} \quad (18)$$

Um einen einfacheren Vergleich der differentiellen Wirkungsquerschnitte zu ermöglichen, wurde die differentiellen Wirkungsquerschnitte wie zuvor nur an den Frequenzen der einzelnen Hohlraummoden für die Apertur und den Resonator mit Hilfe von (14) und (10) ermittelt. Dabei ist $\phi_A = 90^\circ$ und $\phi_R = 0$, so dass für beide Streuprozesse $\theta_A = \theta_R$ gilt. In Abb.3b ist die Winkelabhängigkeit für den Fall $\max \{ \sigma_{d,A} - \sigma_{d,R} \}$ dargestellt. Die Streuquerschnitte liegen in der selben Größenordnung.

7 Zusammenfassung

Es wurde ein analytischer Ausdruck für die Beschreibung von Rückstreu Prozessen durch Aperturen hergeleitet. Die in dieser Arbeit betrachtete spezielle Geometrie lässt sich ohne Weiteres verallgemeinern. Der Einfluss endlich leitender Wände und - wesentlich wichtiger - der Einfluss von Aperturen auf die frequenzabhängige Güte von Resonatoren wurde in die Betrachtung einbezogen, um zuverlässige Aussagen über die Amplitude der Hohlraumresonanzen und deren Abstrahlung treffen zu können. Die analytisch-numerische Auswertung der gewonnenen Ausdrücke erlaubt eine zeiteffiziente Berechnung der inneren Feldverteilung. Die Berücksichtigung des äußeren Streuprozesses des Resonators durch die grobe Näherung durch eine perfekt leitende Kugel erlauben eine erste Abschätzung der Detektierbarkeit von inneren Hohlraummoden im äußeren Feld. Die Ergebnisse

zeigen, dass insbesondere die unterschiedliche Winkelabhängigkeiten der Streuprozesse interessant sind. Unter bestimmten Winkeln ist zu erwarten, dass vor allem das Feld aus dem Inneren des Resonators gemessen wird. Eine solche Messung könnte dann Rückschlüsse auf die Beladung des Resonators zulassen. Die Perspektive für zukünftige Arbeiten liegt vor Allem in der analytischen Beschreibung der Streuung an rechtwinkligen Resonatoren und der Verallgemeinerung auf Aperturen, die nicht elektrische klein sein müssen.

Literatur

- [1] NITSCH, Jürgen B. ; TKACHENKO, Sergey V. ; POTTHAST, Stefan: Transient Excitation of Rectangular Resonators Through Electrically Small Circular Holes. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54 (2012), Nr. 6, S. 1252–1259. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2012.2201724>. – DOI 10.1109/TEMC.2012.2201724. – ISSN 0018–9375
- [2] CHAUVEAU, Janic ; BEAUCOUDREY, Nicole d. ; SAILLARD, Joseph: Resonance Behavior of Radar Targets With Aperture: Example of an Open Rectangular Cavity. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 58 (2010), Nr. 6, S. 2060–2068. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2010.2046837>. – DOI 10.1109/TAP.2010.2046837. – ISSN 0018–926X
- [3] BRYCHKOV, Yurii A. ; MARICHEV, Oleg I.: *Elementary functions*. 3. New York [u.a.] : Gordon and Breach Science Publ, 1992. – ISBN 2–88124–089–5
- [4] HARRINGTON, Roger F.: *Time-harmonic electromagnetic fields*. New York : IEEE Press and Wiley-Interscience, 2001 (IEEE Press series on electromagnetic wave theory). – ISBN 047120806x
- [5] HILL, D. A. ; MA, M. T. ; ONDREJKA, A. R. ; RIDDLE, B. F. ; CRAWFORD, M. L. ; JOHNK, R. T.: Aperture excitation of electrically large, lossy cavities. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 36 (1994), Nr. 3, S. 169–178. <http://dx.doi.org/10.1109/15.305461>. – DOI 10.1109/15.305461. – ISSN 0018–9375
- [6] TESCHE, Frederick M. ; IANOZ, M. ; KARLSSON, Torbjörn: *EMC analysis methods and computational models*. New York : John Wiley & Sons, 1997. – ISBN 0–471–15573–X
- [7] BOHREN, Craig F. ; HUFFMAN, Donald R.: *Absorption and scattering of light by small particles*. New York : Wiley, 1983. – ISBN 0471293407
- [8] GIBSON, Walton: *Scattered Field of a Conducting and Stratified Spheres*. <http://www.mathworks.in/matlabcentral/fileexchange/20430>. Version:2013